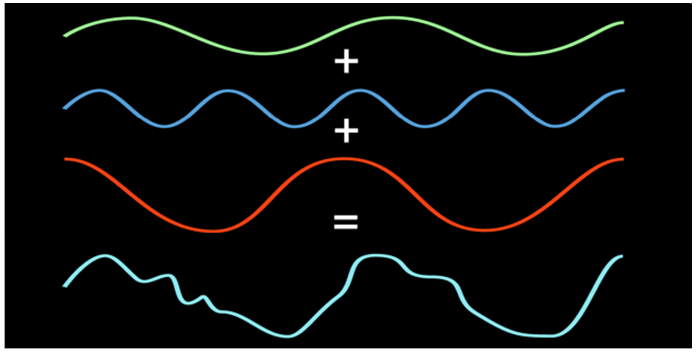
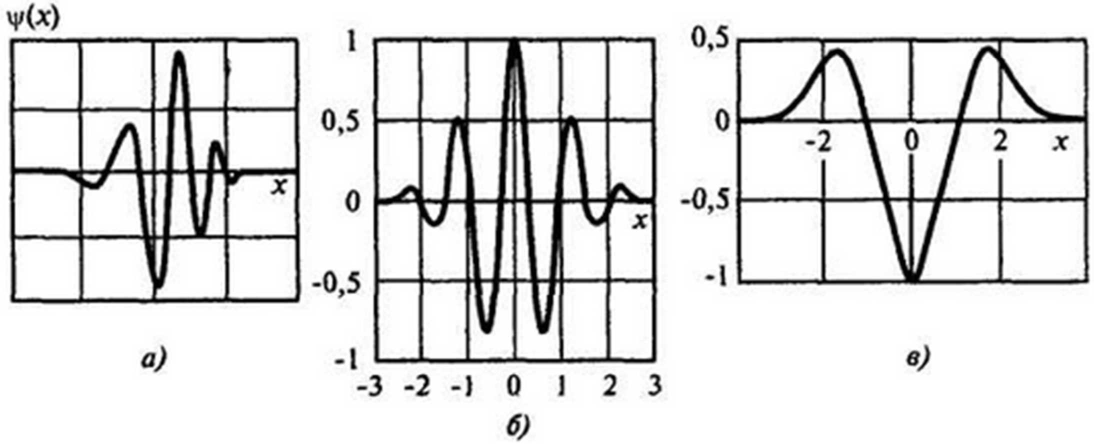
Генерация признаков на основе вейвлет-преобразования

Вейвлеты



Синусоидальная волна – основа Фурье-преобразования

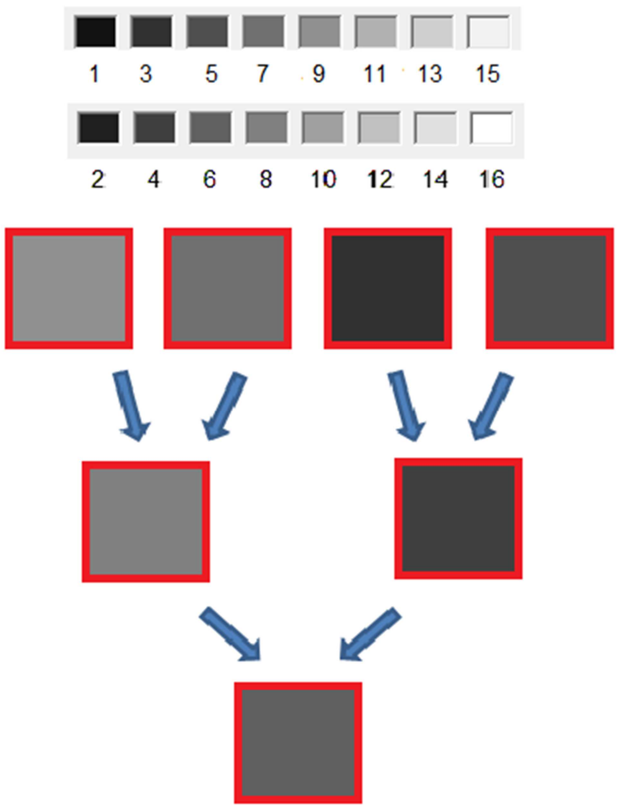


Wavelet - короткая волна, волнишка, всплеск

Преобразование Хаара на основе попарного усреднения

Пример изображения из одной строки в 4 пиксела

16-цветная палитра



9	**7**	**5**	**3**

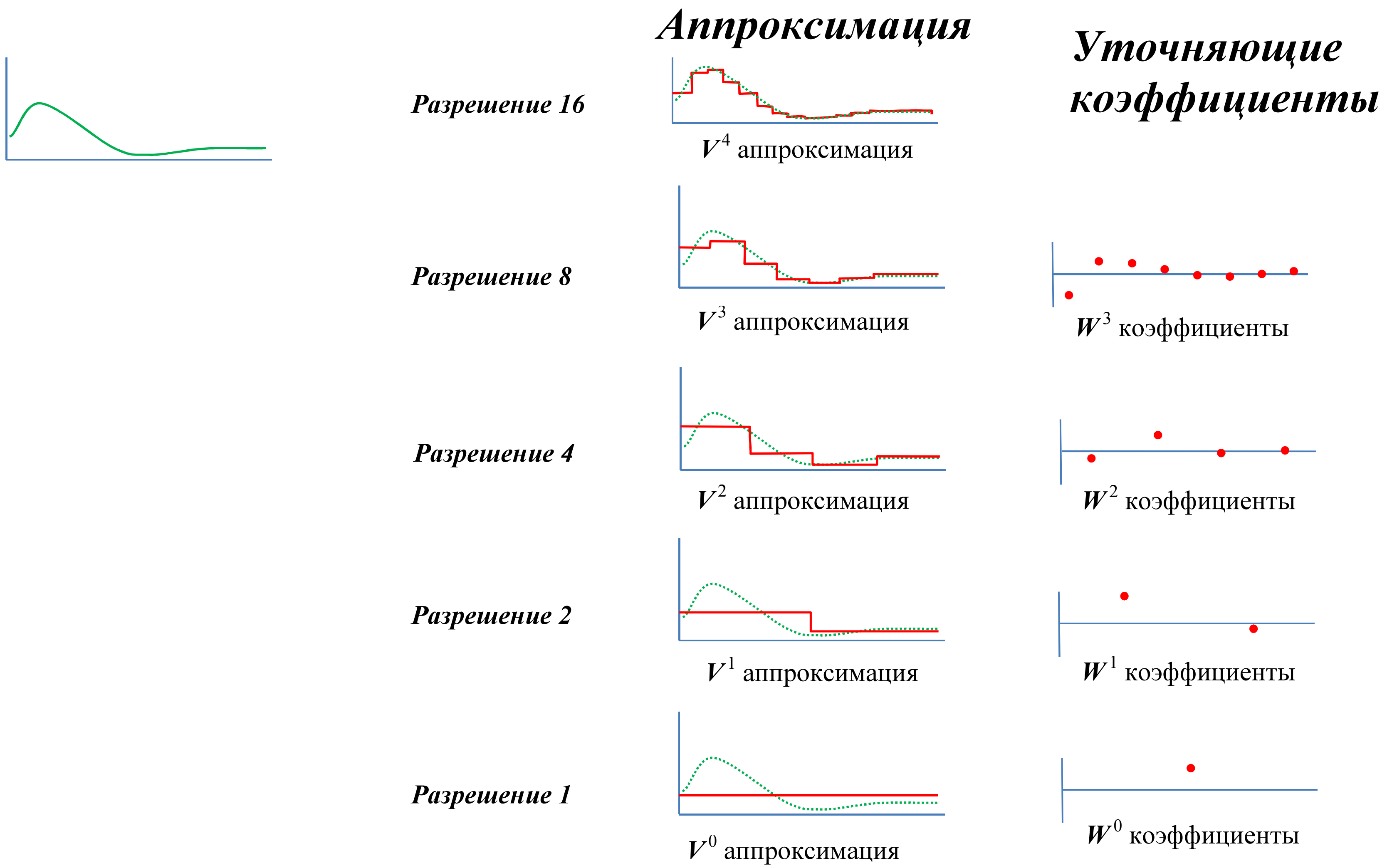
8	**4**	1	-1

6	2	1	-1

Последовательное уменьшение разрешения

Разрешение	Средние значения	Уточняющие коэффициенты
4	9 7 3 5	
2	8 4	1 -1
1	6	2

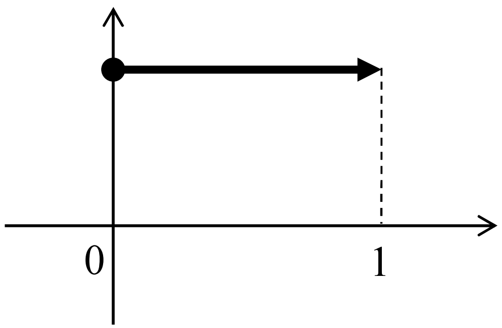
Аппроксимация кусочно-постоянными функциями



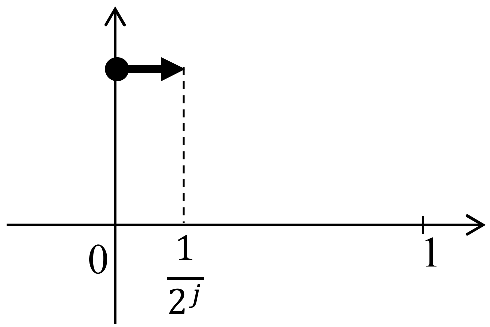
Функции одномерного базиса Хаара

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

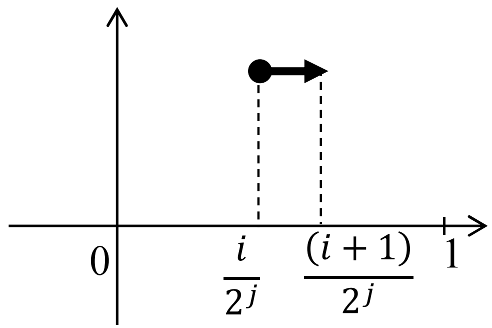
$$\phi_i^j(x) = \phi\left(2^j x - i\right) = \phi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$



$\phi(x)$



$\phi(2^j x)$



$\phi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right)$

Пространство функций

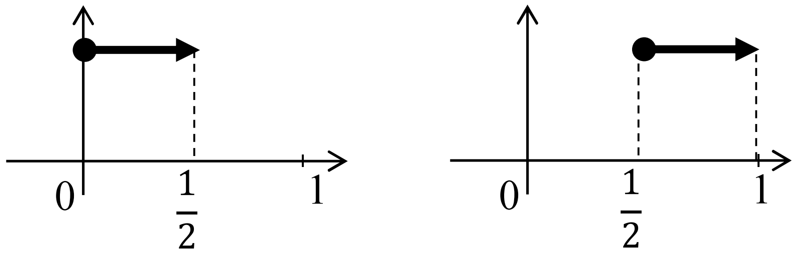
V^j - пространство всех кусочно-постоянных функций

на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^j}$

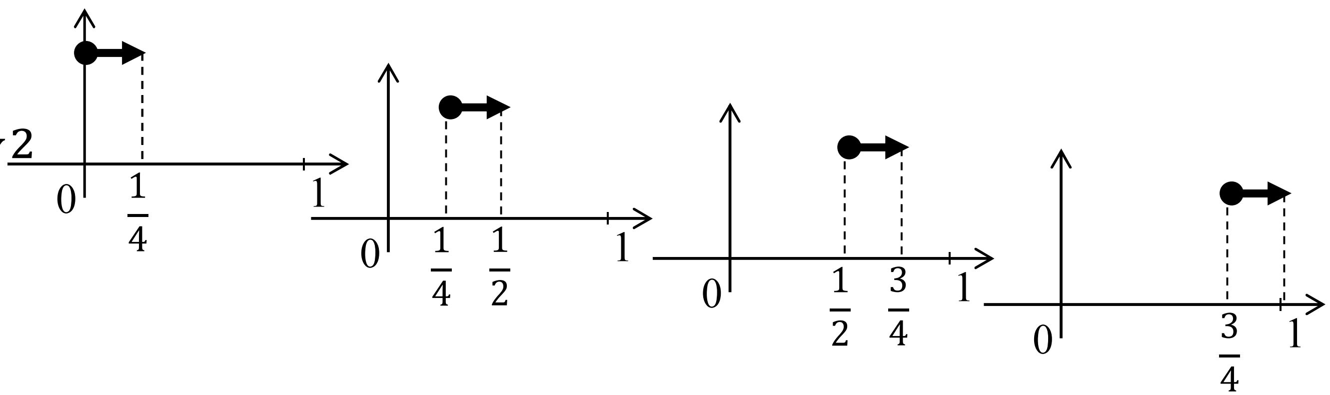
$$\phi_i^j(x) \in V^j, \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

$$\phi_0^0(x) = \phi(x) \in V^0 \,,$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_0^1(x) = \phi(2x) \\ \phi_1^1(x) = \phi(2x-1) \end{array}\right\} \in V^1$$



$$\left.\begin{array}{l} \phi_0^2(x) = \phi(4x) \\ \phi_1^2(x) = \phi(4x-1) \\ \phi_2^2(x) = \phi(4x-2) \\ \phi_3^2(x) = \phi(4x-3) \end{array}\right\} \in V^2$$



Скалярное произведение в пространстве функций

$$f(x),\ \ g(x) \in V^j\ ,$$

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Ортодополнение в пространстве функций

V^j - пространство всех кусочно-постоянных функций

на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^j}$

V^{j+1} - пространство всех кусочно-постоянных функций

на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^{j+1}}$

$$V^j \subset V^{j+1}$$

W^j – ортодополнение для V^j в V^{j+1} – это множество всех функций в V^{j+1}, ортогональных всем функциям из V^j.

Множество вейвлетов

Функции $\phi_i^j(x)$ образуют базис в пространстве V^j.

Определение. Совокупность всех линейно независимых функций $\psi_i^j(x)$, на которые натянуто W^j (базис), называется множеством вейвлетов.

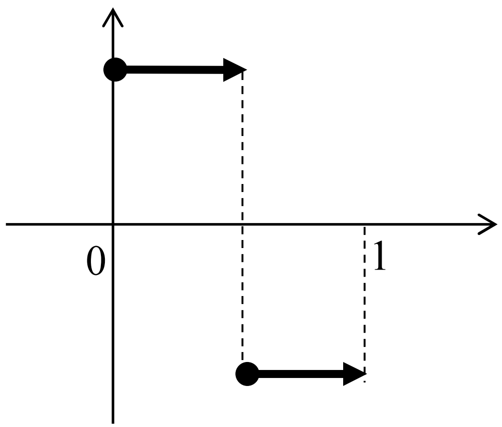
Свойства.

1. Базисные функции ψ_i^j из W^j вместе с базисными функциями ϕ_i^j из V^j образуют базис V^{j+1}
2. Любая базисная функция ψ_i^j из W^j ортогональна любой базисной функции ϕ_i^j из V^j.

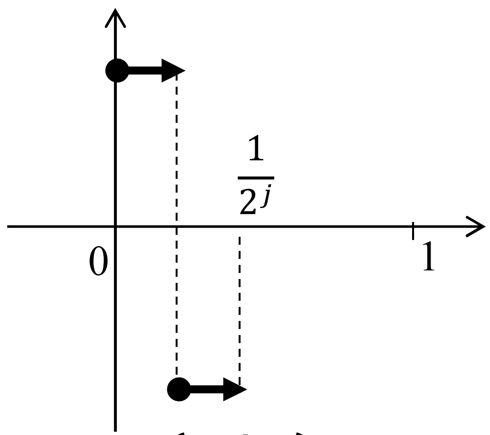
Вейвлеты Хаара

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

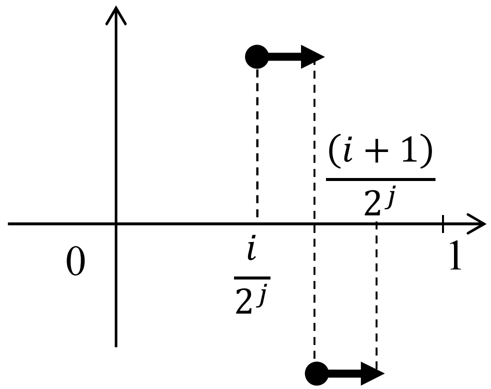
$$\psi_i^j(x) = \psi\left(2^j x - i\right) = \psi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$



$\psi(x)$



$\psi\left(2^j x\right)$



$\psi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right)$

Пример разложения Хаара

$\tau(x) = [\mathbf{9\ \ 7\ \ 3\ \ 5}]$**,**

$\tau(x) \in V^j, j = 2$**.**

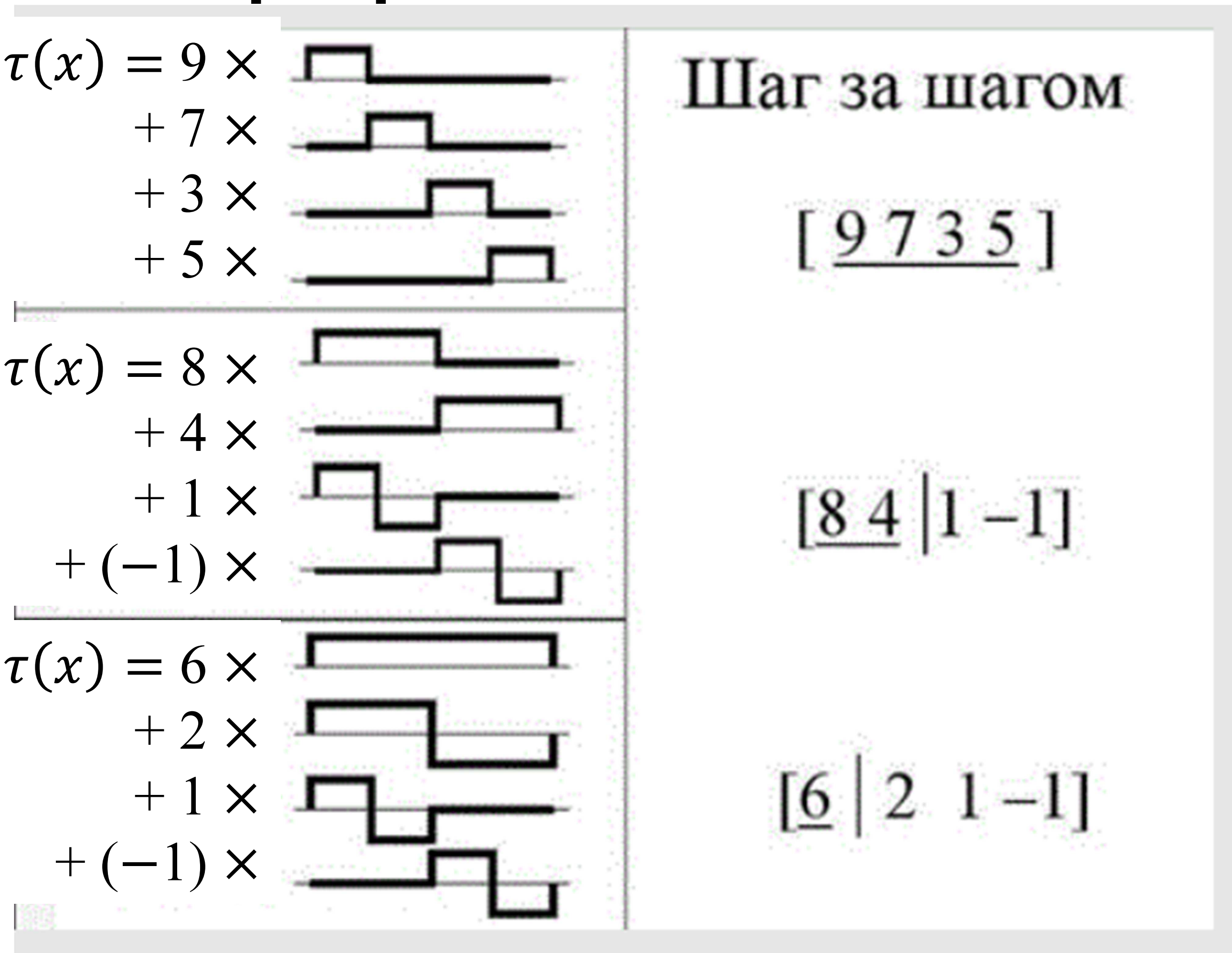
$\tau(x)$ **–** кусочно-постоянная функция на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{4}$.

$$V^2 = V^1 \oplus W^1 = (V^0 \oplus W^0) \oplus W^1$$

$$\begin{aligned}\tau(x) &= c_0^2 \cdot \phi_0^2(x) + c_1^2 \cdot \phi_1^2(x) + c_2^2 \cdot \phi_2^2(x) + c_3^2 \cdot \phi_3^2(x) = \\ &= c_0^1 \cdot \phi_0^1(x) + c_1^1 \cdot \phi_1^1(x) + d_0^1 \cdot \psi_0^1(x) + d_1^1 \cdot \psi_1^1(x) = \\ &= c_0^0 \cdot \phi_0^0(x) + d_0^0 \cdot \psi_0^0(x) + d_0^1 \cdot \psi_0^1(x) + d_1^1 \cdot \psi_1^1(x)\end{aligned}$$

$\phi_0^0(x), \psi_0^0(x), \psi_0^1(x), \psi_1^1(x)$ – базис Хаара для V^2

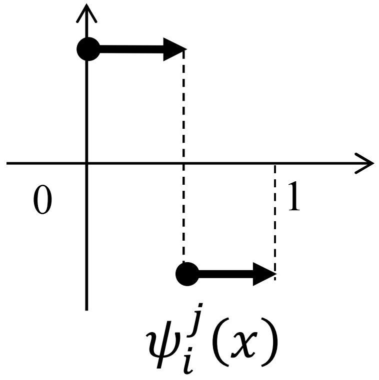
Пример разложения Хаара

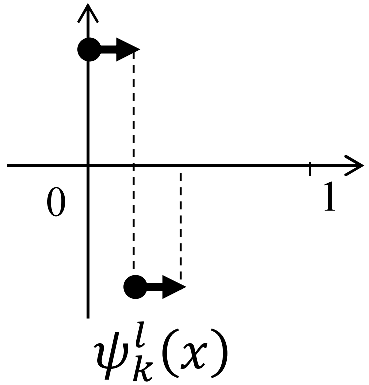


Ортогональность базиса Хаара

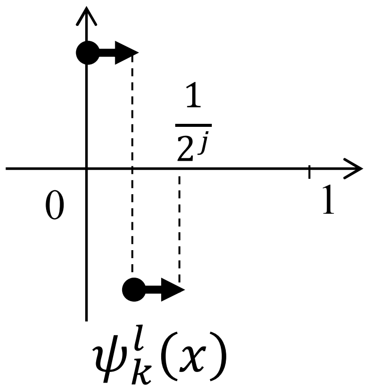
$$\left(\psi_i^j(x), \psi_k^l(x)\right) = 0$$

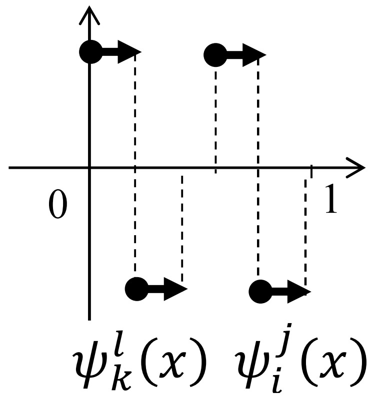
Случай $l \neq j$





Случай $l = j$ и $i \neq k$





Нормирование базиса Хаара

$$\phi_i^j(x) = \sqrt{2^j} \cdot \phi\left(2^j x - i\right)$$
$$\psi_i^j(x) = \sqrt{2^j} \cdot \psi\left(2^j x - i\right)$$

Тогда

$$\left(\phi_i^j(x), \phi_i^j(x)\right) = 1$$
$$\left(\psi_i^j(x), \psi_i^j(x)\right) = 1$$

Разложение

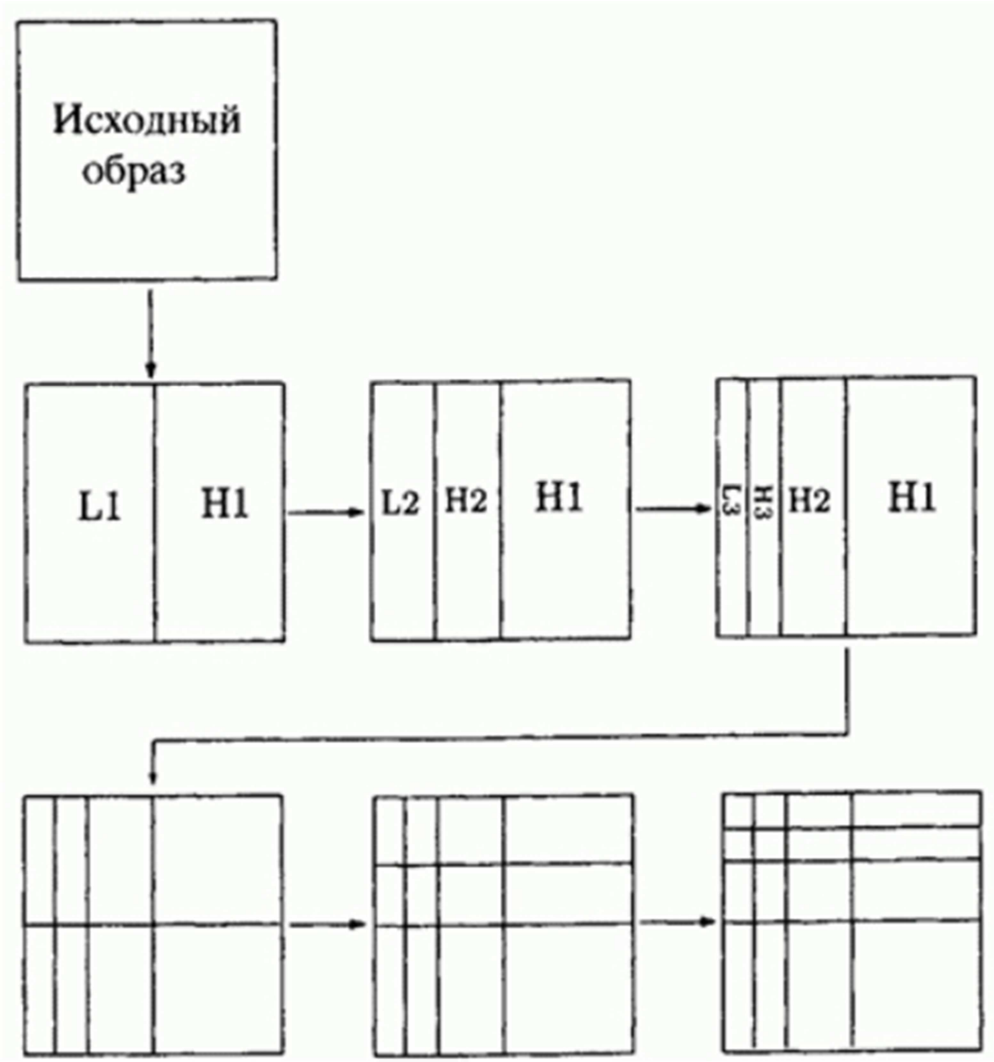
$$[6 \quad 2 \quad 1 \, -1]$$

превращается в

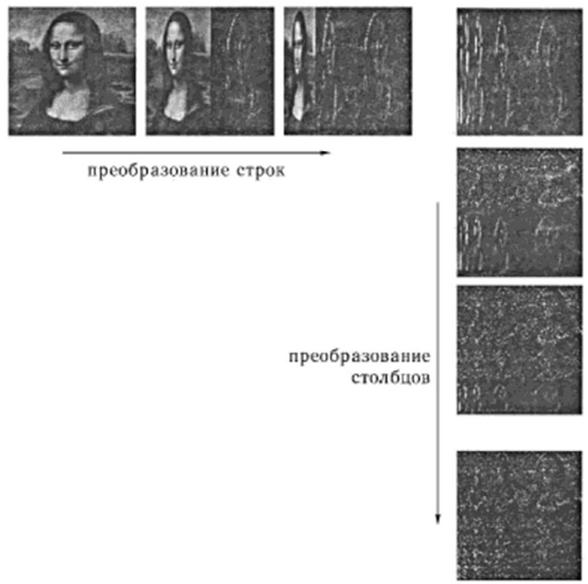
$$\left[6 \quad 2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

Двумерный базис Хаара

Стандартное разложение:

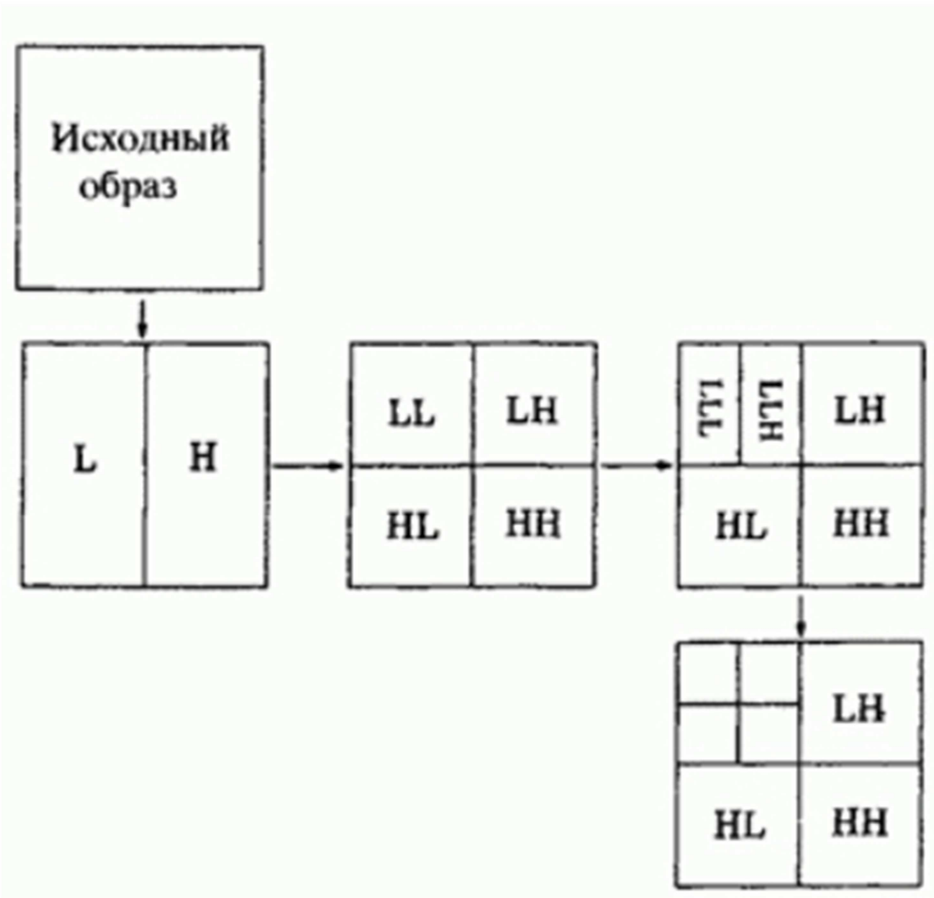


1. Начинается вычислением вейвлетных преобразований всех строк изображения.
2. После этого стандартный алгоритм производит вейвлетное преобразование каждого столбца.



Двумерный базис Хаара

Нестандартное (пирамидальное) разложение:



Пирамидальное разложение вычисляет вейвлетное преобразование, применяя итерации поочередно к строкам и столбцам.

Сжатие изображения вейвлетами Хаара

(а) (б) (в) (г)

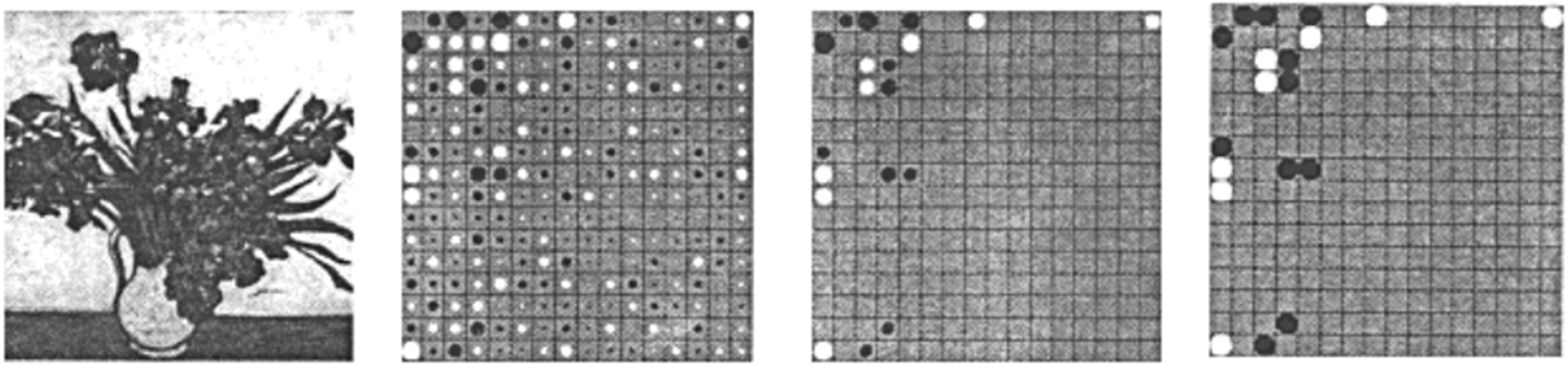
(а) Исходное изображение

(б) 19% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 5% в L^2 - норме

(в) 3% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 10% в L^2 - норме

(г) 1% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 15% в L^2 - норме

Формирование запросов изображений



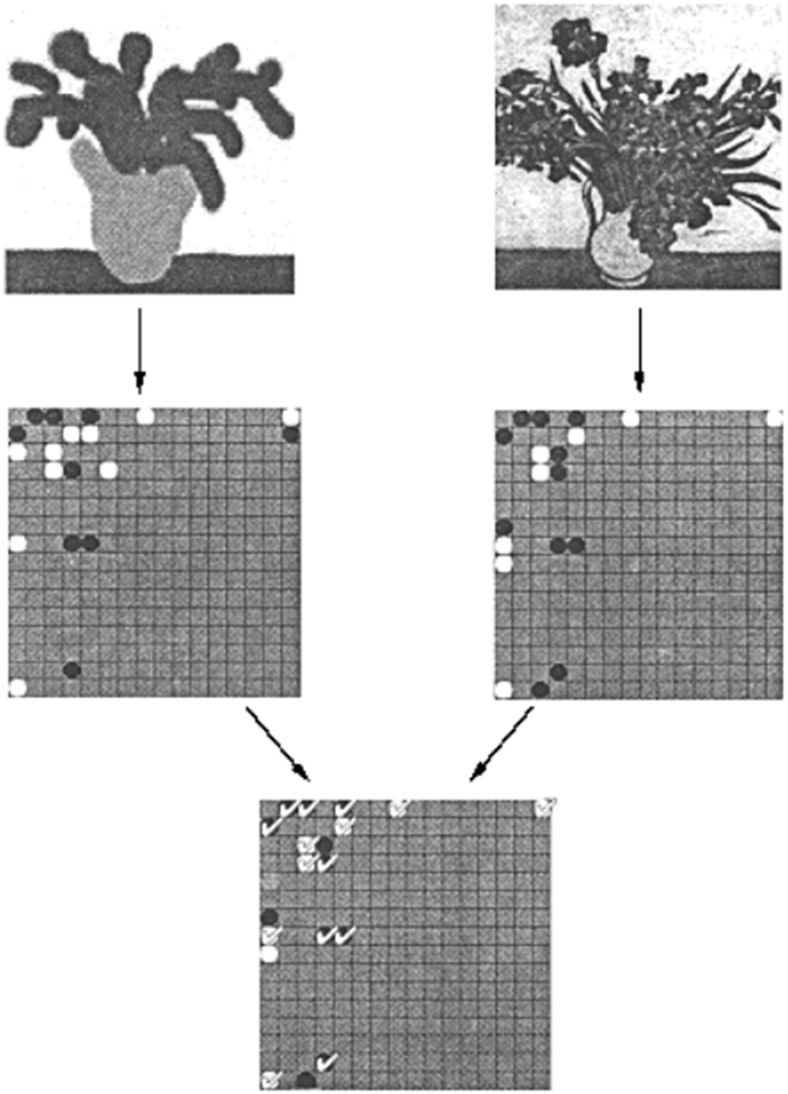
(а) (б) (в) (г)

(а) Исходное изображение «Ирисы» Ва-Гога

(б) Разложение на вейвлет-коэффициенты. Размер круга соответствует величине, цвет – знаку коэффициента.

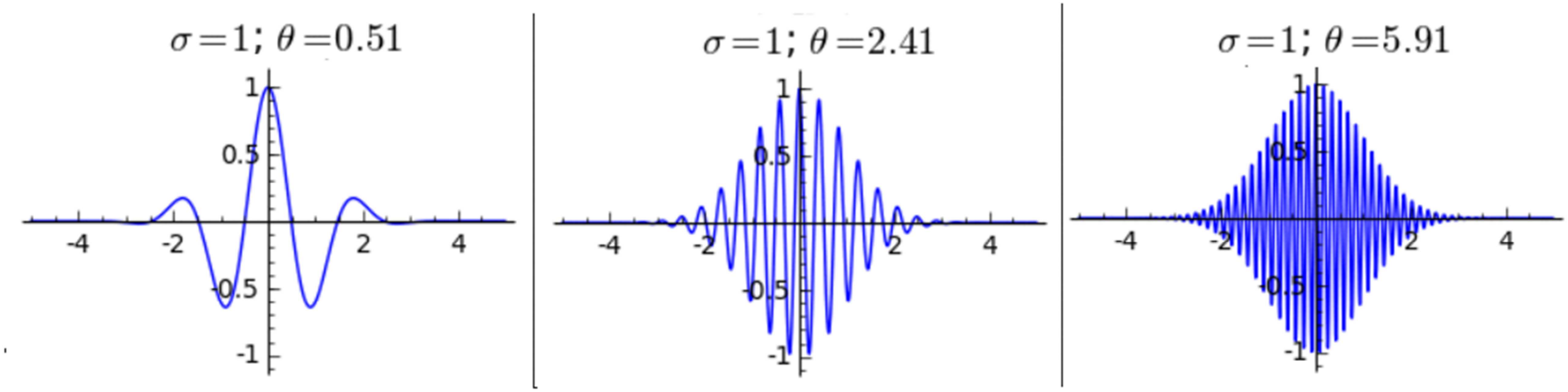
(в) Усечение коэффициентов, остаются только самые большие (г) Квантование оставшихся коэффициентов

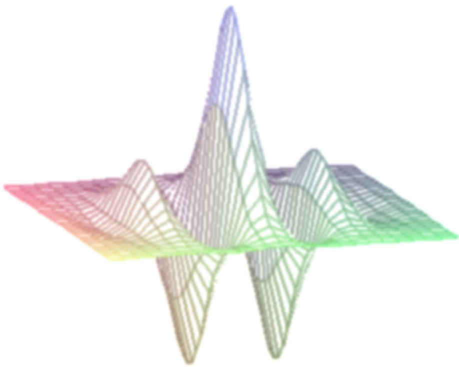
Сравнение изображений



Вейвлет Габора

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cos(2\pi\theta x)$$





$$G(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x_\phi^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_\phi^2}{\sigma_y^2}\right]\right)\cos(2\pi\theta x_\phi)$$

$$x_\phi = x\cos(\phi) + y\sin(\phi)$$

$$y_\phi = -x\sin(\phi) + y\cos(\phi)$$

где:

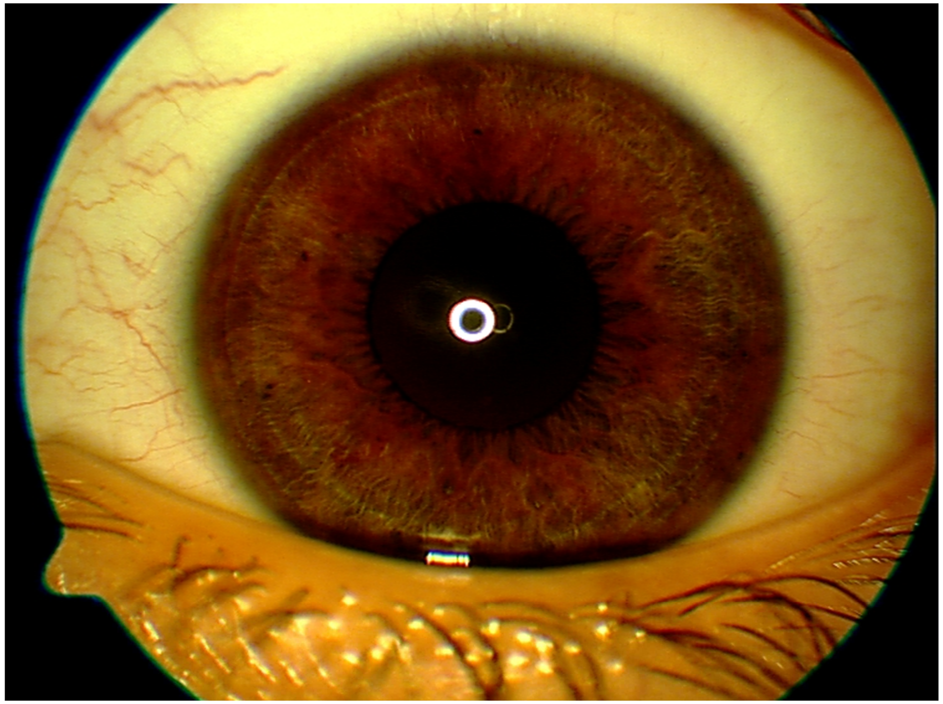
σ_x, σ_y - стандартные отклонения гауссова ядра, по осям x и y, определяющие растянутость фильтра по осям,

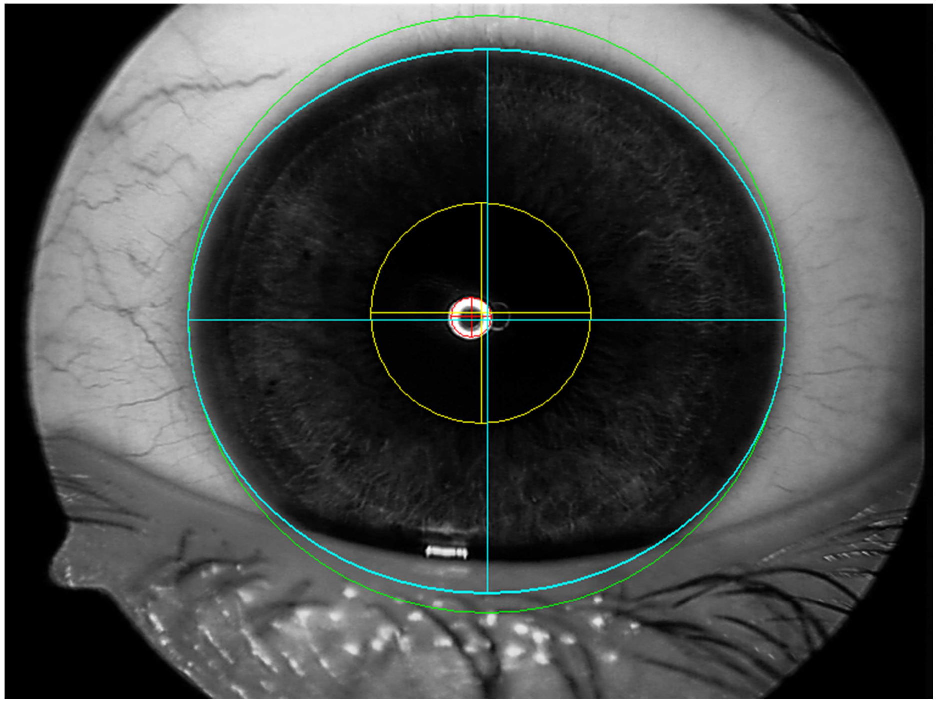
θ - частотная модуляция фильтра,

ϕ - пространственная направленность фильтра, определяющая его ориентацию относительно главных осей.

Биометрическая идентификация по радужной оболочке глаза

Выделение радужки

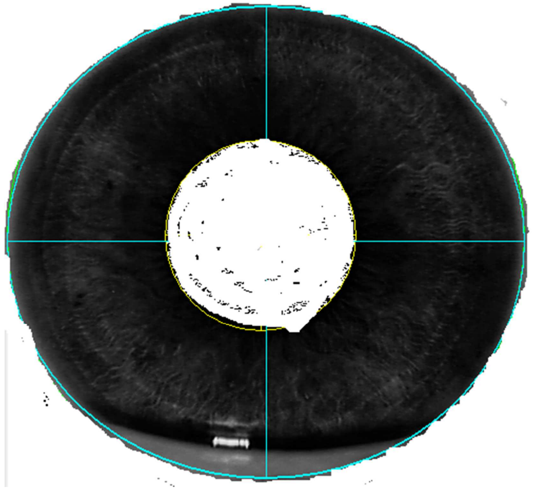




$$\max_{(\rho, x_0, y_0)} \left| \frac{\partial}{\partial\rho} \oint \frac{f(x,y)}{2\pi\rho} ds \right|$$

(ρ, x_0, y_0) – окружность с центром (x_0, y_0) и радиусом ρ .

Вейвлет-разложение



$$c = \iint\limits_{\rho\ \varphi} f(\rho,\varphi)\cdot\left[e^{-i\cdot 2\pi(\varphi-\varphi_0)}\cdot e^{-(\rho-\rho_0)^2/\alpha^2}\cdot e^{-(\varphi-\varphi_0)^2/\beta^2}\right]\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$$

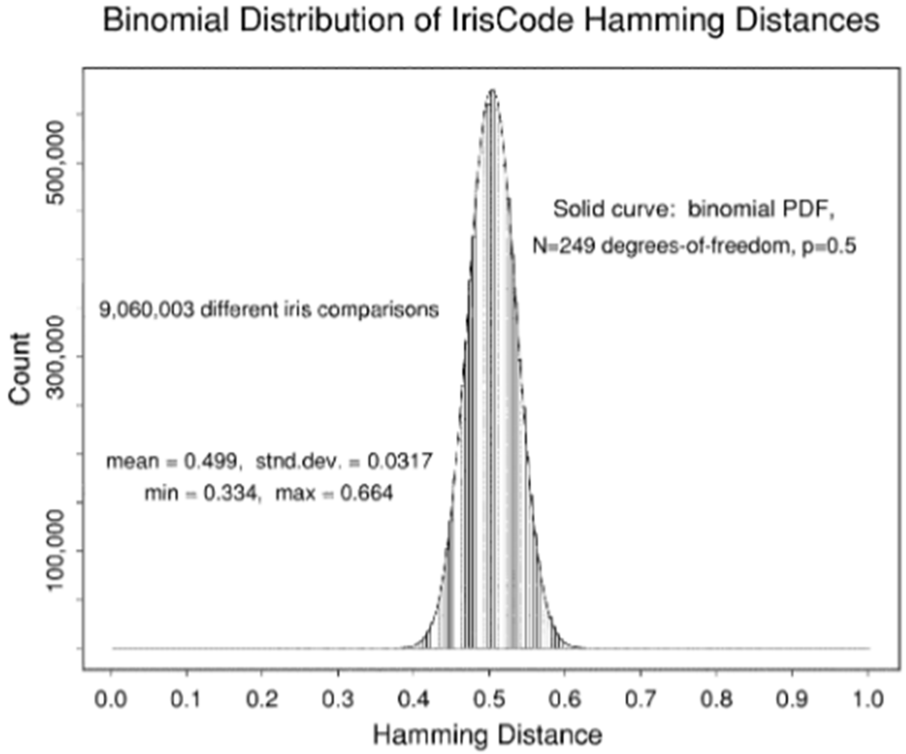
$$b_{real} = \begin{cases}1, & \text{если} \quad Re(c)\geq 0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

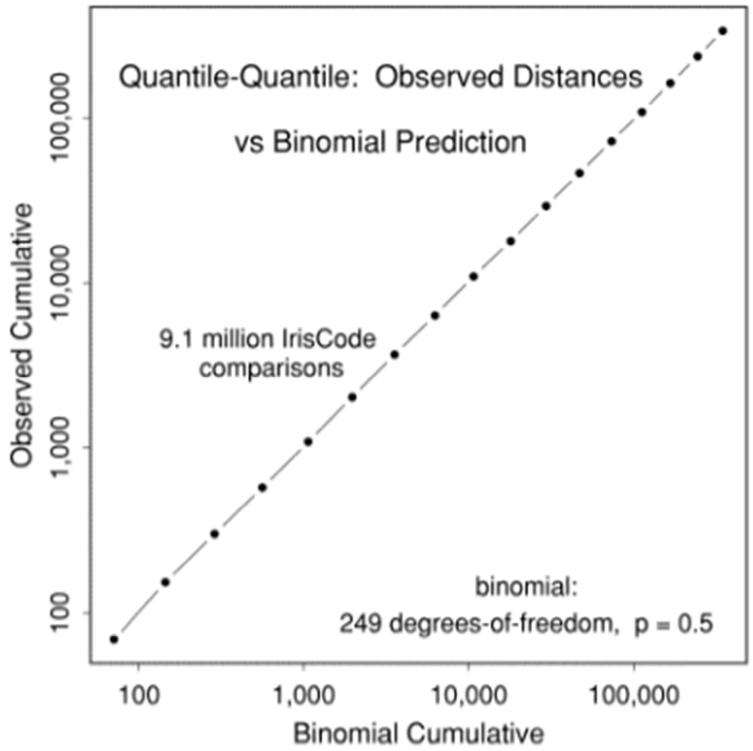
$$b_{img} = \begin{cases}1, & \text{если} \quad Im(c)\geq 0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Измерение сходства и различия

$$B = (b_1, \ldots, b_{2048})\text{ – вектор IrisCode}$$

$$HD(B_1, B_2)\text{ – расстояние Хэмминга}$$





Классификатор